Série 6 - Dynamique du point matériel

1 Pendule sur un plan incliné

Objectif : Dynamique d'un pendule incliné en coordonnées cylindriques.

Théorie : 6.1 Contraintes géométriques ; 6.2 Pendule mathématique.

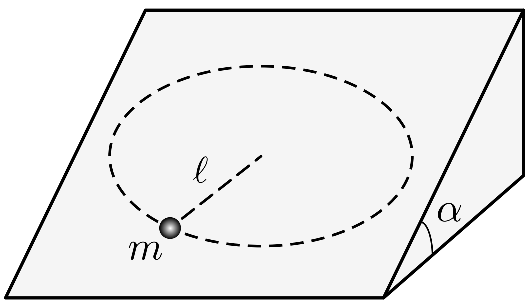
Un pendule constitué d'un point matériel de masse m attaché à l'extémité du fil de masse négligeable et de longueur ℓ oscille sans frottement sur un plan incliné d'un angle α avec le plan horizontal.

(a) Déterminer l'équation du mouvement du point matériel.

(b) Déterminer la tension $\boldsymbol{T}$ du fil et la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercée par le plan incliné en fonction du mouvement.

(c) Identifier l'angle d'équilibre ϕ_0 dans le plan incliné d'oscillation.

(d) Déterminer la période d'oscillation T dans la limite des petites oscillations autour de l'angle l'équilibre.



2 Chute sur une sphère

Objectif : Condition de décollage en coordonnées sphériques.

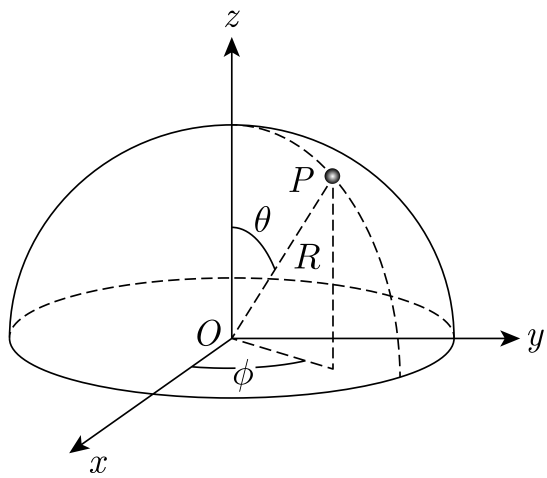
Théorie : 6.1 Contraintes géométriques ; 6.2.3 Période d'oscillation générale.

Un point matériel P de masse m est posé au sommet d'une demi-sphère de rayon R. Il commence à glisser sans frottement.

(a) Déterminer l'équation du mouvement.

(b) Déterminer la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercée par la sphère en fonction du mouvement.

(c) Ecrire la condition de décollage du point matériel et déterminer l'angle de décollage θ_0 en intégrant par rapport au temps l'équation du mouvement dans le plan vertical.



3 Tube en rotation avec ressort

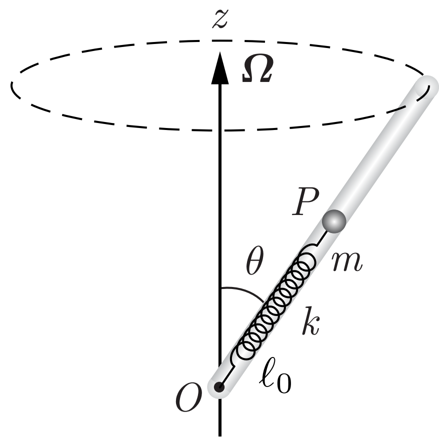
Objectif : Condition d'équilibre stable en coordonnées sphériques.

Théorie : 6.1 Contraintes géométriques ; 4.1 Mouvement oscillatoire.

★ **Examen** : Problème d'examen.

Une bille de masse m, considérée comme un point matériel P, coulisse sans frottement dans un tube. Le tube est en rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}}$, où $\Omega = \text{cste} > 0$, dans le sens trigonométrique autour de l'axe vertical Oz. Lors de la rotation du tube, l'angle d'inclinaison constant de l'axe du tube par rapport à l'axe vertical Oz est $\theta = \text{cste}$ où $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. La bille est attachée à un ressort de constante élastique k et de longueur au repos ℓ_0 tel que,

$$k\ell_0 > mg\cos\theta\,.$$



L'autre extrémité du ressort est fixée à l'origine.

(a) Déterminer l'équation du mouvement du point matériel.

(b) Déterminer la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercée par le tube sur la bille en fonction de son mouvement.

(c) Déterminer la coordonnée radiale d'équilibre r_0 de la bille, c'est à dire la coordonnée pour laquelle il n'y a pas de mouvement relatif de la bille par rapport au tube pour une vitesse angulaire Ω telle que $\Omega^2\sin^2\theta \neq k/m$.

(d) Déterminer la condition sur la vitesse angulaire Ω pour que la position d'équilibre r_0 soit une position d'équilibre stable et déterminer la période

T de ce mouvement d'oscillation.

4 Métronome en rotation

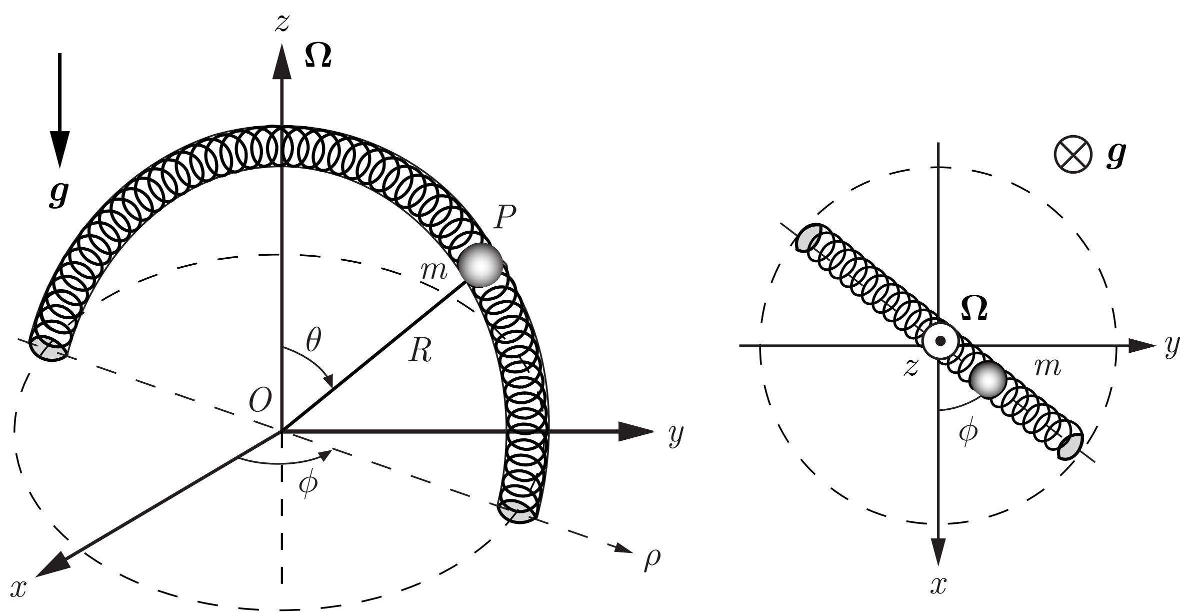
⦿ **Objectif** : Condition d'équilibre stable en coordonnées sphériques.

📖 **Théorie** : 6.1 Contraintes géométriques ; A.6.1 Métronome vertical.

★ **Examen** : Problème d'examen.

Un demi-anneau de rayon R est mis en rotation par un moteur à vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}}$ autour de l'axe vertical Oz qui passe par l'origine O au centre de l'anneau. Un point matériel P de masse m est attaché à deux ressorts identiques de constante élastique k et de longueur au repos $\frac{\pi}{2}\,R$ qui peuvent se déformer le long de l'anneau. Le point matériel coulisse sans frottement le long de l'anneau dans le plan vertical radial $O\rho z$. On considère que la constante élastique k des ressorts, la masse m du point matériel P et la vitesse angulaire scalaire Ω de rotation de l'anneau satisfont en tout temps la condition suivante,

$$2\,k\,R > m\,R\,\Omega^2 + mg$$



(a) Déterminer l'équation du mouvement du point matériel.

(b) Déterminer la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercée par le demi anneau en fonction du mouvement.

(c) Identifier l'angle nodal d'équilibre θ_0 par rapport à l'anneau.

(d) Déterminer la pulsation ω des petites oscillations autour de l'angle d'équilibre θ_0.